

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系（练习）

一、一元二次方程的判别式

1. 已知 $x = 1$ 是方程 $x^2 + mx + 3 = 0$ 的一个实数根，则 m 的值是 _____ .

【答案】 -4

【解析】 把 $x = 1$ 代入方程 $x^2 + mx + 3 = 0$ 得： $1 + m + 3 = 0$ ，

解得： $m = -4$ ，

故答案为： -4 .

【标注】 【知识点】 由一元二次方程的解求参数的值

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 8x + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a < 4$ 且 $a \neq 0$

【解析】 由一元二次方程 $ax^2 - 8x + 4 = 0$ 有两个不等实根可得： $\begin{cases} \Delta = 64 - 16a > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ ，

解得： $a < 4$ 且 $a \neq 0$.

故答案为： $a < 4$ 且 $a \neq 0$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

3. 若关于 x 的一元二次方程 $(k - 1)x^2 + x + 1 = 0$ 有实数根，则 k 的最大整数值是 _____ .

【答案】 0

【解析】 一元二次方程 $(k - 1)x^2 + x + 1 = 0$ 有实数根，

故 $\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta = 1 - 4(k - 1) \geq 0 \end{cases}$ ，

解得 $k \leq \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 1$ ，

$\therefore k$ 的最大整数值为 0 .

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

4. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > -1$ 且 $k \neq 0$

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore k \neq 0 \text{ 且 } \Delta > 0, \text{ 即 } (-2)^2 - 4 \times k \times (-1) > 0,$$

解得 $k > -1$ 且 $k \neq 0$.

$\therefore k$ 的取值范围为 $k > -1$ 且 $k \neq 0$,

故答案为： $k > -1$ 且 $k \neq 0$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

5. 如果关于 x 的一元二次方程 $(k+2)x^2 - 3x + 1 = 0$ 有实数根，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq \frac{1}{4}$ ，且 $k \neq -2$

【解析】 $(k+2)x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (k+2) \times 1$$

$$= 9 - 4k - 8$$

$$= 1 - 4k$$

如果关于 x 的一元二次方程，

$(k+2)x^2 - 3x + 1 = 0$ 有实数根，

则： $1 - 4k \geq 0$ 且 $k+2 \neq 0$ ，

解得： $k \leq \frac{1}{4}$ ，且 $k \neq -2$.

故答案为： $k \leq \frac{1}{4}$ ，且 $k \neq -2$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - (m-1) = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $m > 0$ 且 $m \neq 1$

B. $m > 0$

C. $m \geq 0$ 且 $m \neq 1$

D. $m \geq 0$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - (m-1) = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times [-(m-1)] = 4m > 0,$$

$$\therefore m > 0.$$

故选B.

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

7. 一元二次方程 $(m-1)x^2 + x + m^2 + 2m - 3 = 0$ 的一个根为0, 则 m 的值为().

A. -3

B. 1

C. 1或-3

D. -4或2

【答案】A

【解析】由题意知: 将 $x = 0$ 代入 $(m-1)x^2 + x + m^2 + 2m - 3 = 0$,

得: $m^2 + 2m - 3 = 0$, 解得: $m = 1$ 或 $m = -3$,

又: $(m-1)x^2 + x + m^2 + 2m - 3 = 0$ 是一元二次方程,

$\therefore m \neq 1$,

综上, $m = -3$.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

8. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是().

A. $a < 9$ 且 $a \neq 1$

B. $a > 9$ 且 $a \neq 10$

C. $a < 9$ 且 $a \neq 0$

D. $a < 9$ 且 $a \neq -1$

【答案】C

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta > 0$ 且 $a \neq 0$, 即 $6^2 - 4a > 0$ 且 $a \neq 0$,

$\therefore a < 9$ 且 $a \neq 0$.

故选C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

9. 一元二次方程 $2x^2 - 5x - 2 = 0$ 的根的情况是().

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

【答案】B

【解析】 $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 + 16 = 41 > 0$,

所以该一元二次方程有两个不相等的实数根 .

故选B .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

10. 关于 x 的一元二次方程 $3x^2 - 4x + 8 = 0$ 的根的情况是 () .

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

【答案】 D

【解析】 根据题意得 :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4 \times 3 \times 8 \\ &= 16 - 96 \\ &= -80 < 0 ,\end{aligned}$$

$\therefore$ 该方程没有实数根 .

故选D .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 , 则 m 的取值范围是 () .

- A. $m > \frac{3}{4}$ B. $m \geq \frac{3}{4}$ C. $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$ D. $m \geq \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

【答案】 C

【解析】 根据题意列出方程组 $\begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m-2)^2 > 0 , \\ m-2 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$.

故选C .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

12. 已知 $m > 1$, 则关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + \frac{1}{4}m + 3 = 0$ 根的情况为 () .

- A. 无实数根 B. 有两个相等实数根
C. 有两个不相等实数根 D. 无法确定

【答案】A

【解析】在方程 $x^2 - 2x + \frac{1}{4}m + 3 = 0$ 中， $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (\frac{1}{4}m + 3) = -m - 8$ 。

$$\therefore m > 1,$$

$$\therefore -m - 8 < 0,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + \frac{1}{4}m + 3 = 0$ 无实数根。

故选A。

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是（ ）。

A. $m > \frac{3}{4}$

B. $m \geq \frac{3}{4}$

C. $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

D. $m \geq \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$

【答案】C

【解析】根据题意列出方程组 $\begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m-2)^2 > 0, \\ m-2 \neq 0 \end{cases}$ ，

解之得 $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$ 。

故选：C。

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

14. 关于 x 的方程 $(a-5)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有实数根，则 a 满足（ ）。

A. $a \geq 1$

B. $a > 1$ 且 $a \neq 5$

C. $a \geq 1$ 且 $a \neq 5$

D. $a \neq 5$

【答案】A

【解析】分类讨论：

①当 $a-5=0$ 即 $a=5$ 时，方程变为 $-4x-1=0$ ，此时方程一定有实数根；

②当 $a-5 \neq 0$ 即 $a \neq 5$ 时，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $(a-5)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有实数根，

$$\therefore 16 + 4(a-5) \geq 0,$$

$$\therefore a \geq 1.$$

$\therefore a$ 的取值范围为 $a \geq 1$ 。

故选：A。

【标注】【知识点】需分类讨论的含参一元二次方程

二、根与系数的关系

15. 已知 $2 - \sqrt{3}$ 是一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根, 则方程的另一个根为 _____ .

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】 $\because 2 - \sqrt{3}$ 是一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根,

$\therefore$ 将 $x = 2 - \sqrt{3}$ 代入方程可得 $c = 1$,

则方程为 $x^2 - 4x + 1 = 0$,

解该方程可得另一根为 $2 + \sqrt{3}$.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

16. 方程 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 与方程 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 所有实根的和等于() .

A. 9

B. -9

C. 6

D. 3

【答案】A

【解析】解方程 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

由韦达定理: $x_1 + x_2 = 3$,

设方程 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 的两根为 x_3, x_4 ,

由韦达定理: $x_3 + x_4 = 6$,

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$.

故选A.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

17. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2 , 且满足

$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, 则 k 的值为() .

A. -1

B. $\frac{3}{4}$

C. -1或 $\frac{3}{4}$

D. 不存在

【答案】B

【解析】 $\because$ 一元二次方程 $x^2 + kx + 4k^2 - 3 = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = 4k^2 - 3,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = x_1 x_2,$$

$$\therefore -k = 4k^2 - 3,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4} \text{ 或 } -1,$$

$\therefore$ 方程有两个实根,

$$\therefore \Delta = k^2 - 4(4k^2 - 3) \geq 0,$$

$$\therefore k^2 \leq \frac{4}{5},$$

$\therefore k = -1$ 不符合题意, 舍去,

$$\therefore k = \frac{3}{4},$$

故选: B.

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

18. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两实数根之积为负, 则 m 的取值范围 _____.

【答案】 $m > \frac{1}{2}$

【解析】设 x_1, x_2 为方程 $x^2 + 2x - 2m + 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\text{由已知得: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} 8m \geq 0 \\ -2m + 1 < 0 \end{cases}.$$

$$\text{解得: } m > \frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

19. 已知一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$.

(1) 若方程有两个实数根, 求 m 的取值范围.

(2) 若方程有两个实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 + 3x_2 = 3$, 求 m 的值.

【答案】(1) $m \leq 1$.

$$(2) m = \frac{3}{4}.$$

【解析】(1) $\because$ 方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\text{即 } 4 - 4m \geq 0,$$

$$\Rightarrow m \leq 1.$$

$$(2) \because x_1 + 3x_2 = 3, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2,$$

$$\text{即 } x_1 + x_2 + 2x_2 = 3,$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{将 } x_2 = \frac{1}{2} \text{ 代入方程}$$

$$\frac{1}{4} - 1 + m = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4},$$

$$\therefore m = \frac{3}{4}.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2) = a^2$.

(1) 求证：对于任意实数 a ，方程总有两个不相等的实数根.

(2) 若方程的一个根是1，求 a 的值及方程的另一个根.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 4.

【解析】(1) $x^2 - 5x + 6 - a^2 = 0$,

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4(6 - a^2) = 4a^2 + 1,$$

$$\therefore 4a^2 + 1 > 0,$$

所以对于任何实数 a ，方程总有两个不相等的实数根.

(2) 当 $x = 1$ 时， $a^2 = 2$ ， $a = \pm\sqrt{2}$ ，

$$\text{当 } a = \pm\sqrt{2} \text{ 时， } x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$(x-4)(x-1) = 0,$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1,$$

所以方程的另一个根为4.

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值